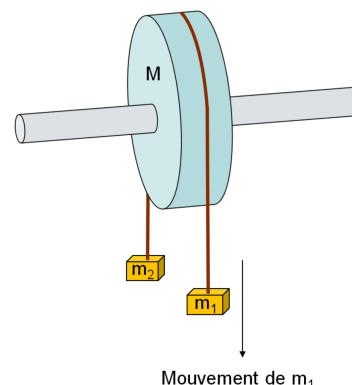


Série 13

Exercice S13E1^(*) (20 min) : Poulie et masses

Soient deux masses m_1 et m_2 reliées entre elles par une corde inextensible passant sur une poulie ayant la forme d'un disque de masse M et de rayon R , comme indiqué sur le schéma ci-contre. La masse m_1 étant plus grande que la masse m_2 , elle descend avec une accélération a .

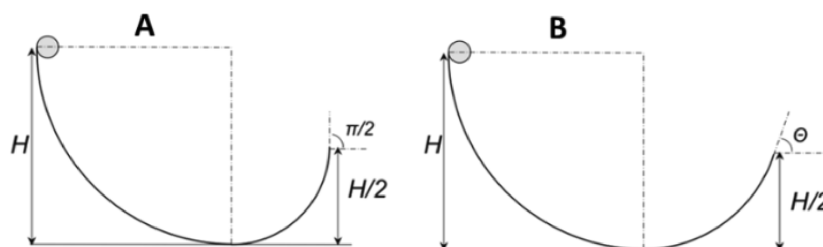


- a) On note T_1 (resp. T_2) la tension du fil du côté de la masse m_1 (resp. m_2) au niveau de la poulie. Exprimez $(T_1 - T_2)$ en fonction de l'accélération angulaire de la poulie $\dot{\omega}$, M et R . Que vaut $(T_1 - T_2)$ si M est négligeable ?

- b) Calculez a , l'accélération de m_1 , en fonction de m_1 , m_2 , M , et g .

On rappelle que le moment d'inertie pour un disque est $\frac{1}{2}MR^2$, où R est le rayon du disque et M sa masse. On considérera que la masse de l'axe est négligeable et que la corde ne glisse pas sur la poulie.

Exercice S13E2^{*} (20 min) : Cylindre sur un tremplin (Extrait examen)



Un cylindre plein homogène de rayon r et de masse m est lâché du haut d'un tremplin avec une vitesse initiale nulle. Le haut du tremplin est à la hauteur H et le point d'éjection à la hauteur $\frac{H}{2}$. On considère les deux types de tremplin (A et B) schématisés ci-dessus, et les trois cas de figure suivants :

1. Tremplin A : le cylindre glisse sans rouler le long du tremplin et est éjecté verticalement.
2. Tremplin A : le cylindre roule sans glisser le long du tremplin et est éjecté verticalement.

Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile

Le temps est indicatif et correspond au temps considéré en conditions d'examen

3. Tremplin B : le cylindre roule sans glisser le long du tremplin et est éjecté en formant un angle θ par rapport à l'horizontale.

Dans tout l'exercice, on considère que le cylindre est uniquement soumis à son poids et on néglige les forces de frottement de l'air. On note h_1 , h_2 et h_3 les hauteurs maximales atteintes par le cylindre après son éjection du tremplin pour ces trois cas respectivement.

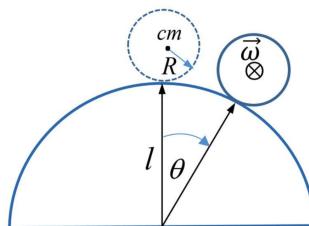
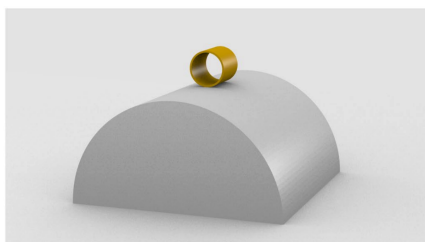


- a) Classez qualitativement par valeur décroissante, ou égalité s'il y a lieu, les valeurs (h_1 , h_2 , h_3 et H). Sans calcul, commentez les raisons de ce classement.
- b) Calculez quantitativement h_1 , h_2 et h_3 en fonction des données du problème.

Rappel : Le moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon R selon son axe de révolution Δ s'écrit: $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Exercice S13E3** (45 min) : Cylindre creux qui roule puis décolle (Examen 2019)

Un cylindre creux de masse m , de longueur L , de rayon R , et d'épaisseur négligeable repose sur un support dont la forme est un demi-cylindre de rayon l , comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Les deux axes de symétrie des cylindres sont parallèles. Le cylindre creux est initialement immobile au sommet du support ($\theta = 0$), puis il se met à rouler sans glisser le long du support. La position du cylindre creux est repérée par l'angle θ , tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous. On néglige les frottements de l'air. On note g l'accélération de la pesanteur.



- a) Démontrez que le moment d'inertie I_{cm} du cylindre creux pour une rotation autour de son axe de symétrie est $I_{cm} = mR^2$.
- b) Indiquez les forces qui s'exercent sur le cylindre creux. On prendra soin de préciser leur point d'application. Dessinez ces forces sur le schéma de droite, pour la position $\theta > 0$.

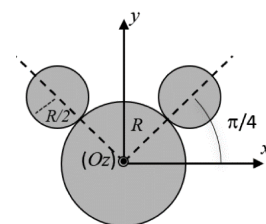
Le cylindre creux roule sans glisser jusqu'à un angle critique θ_C , puis il « décolle ». Il n'est alors plus en contact avec le support.

- c) Quel est le type de trajectoire du cylindre creux après avoir quitté le support ?
- d) Calculez l'angle critique de décollage θ_C .
- e) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon θ , pour $\theta < \theta_C$ (pendant qu'il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de R , l , et g .
- f) Si le cylindre creux glissait sans frottement (pas de rotation), l'angle critique de décollage θ_C serait-il plus grand ou plus petit ? Argumentez sans calcul.

* * * * *

Exercices supplémentaires**Exercice S13ES1* (10 min) : Moment d'inertie de la tête de Mickey**

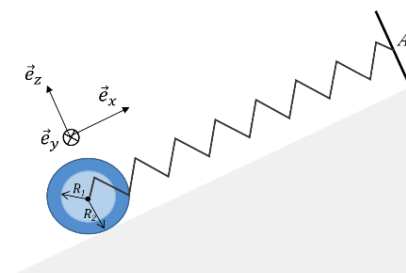
La tête de Mickey est composée de trois disques de densité ρ constante et d'épaisseur e . Le rayon de sa figure est R et le rayon de ses oreilles est $\frac{R}{2}$. On note (Oz) l'axe passant par le milieu de la figure de Mickey (voir schéma ci-contre). Calculez le moment d'inertie de la tête de Mickey autour de (Oz) en fonction de R et de sa masse M .



Le moment d'inertie d'un disque homogène de rayon R et de masse M autour de son axe de révolution est : $I_z = \frac{1}{2}MR^2$.

Exercice S13ES2 (40 min) : Cylindre et ressort (Examen 2017)**

Un cylindre de masse M est constitué de deux matériaux différents de masse volumique ρ_1 pour la partie interne (pour un rayon variant de 0 à R_1) et ρ_2 pour la partie externe (pour un rayon variant de R_1 à R_2). Ce cylindre roule sans glissement sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. Un axe passant par son centre de masse est relié à un ressort de longueur l_0 au repos et de constante de raideur k . L'axe du cylindre reste parallèle à \vec{e}_y pendant son déplacement suivant \vec{e}_x .



- a) Calculez le moment d'inertie I du cylindre pour une rotation autour d'un axe parallèle à \vec{e}_y et passant par son centre de masse.

- b) Dans un premier temps, le système est immobile et à sa position d'équilibre. Déterminez l'allongement du ressort Δl .

Partant de la position d'équilibre, on déplace le cylindre vers le bas, puis on le lâche.

- c) Quelle est la condition au point de contact pour que le roulement ait lieu sans glissement ?
- d) Déterminez l'équation différentielle du mouvement.
- e) Quelle est la pulsation et donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle du mouvement.

Le point d'attache du ressort en A est maintenant soumis à un mouvement périodique selon \vec{e}_x à la pulsation Ω .

- f) Quand le régime stationnaire est établi, quelle est la pulsation du mouvement oscillatoire du cylindre ?
- g) Tracez qualitativement sur un graphe l'évolution de l'amplitude des oscillations du cylindre en fonction de la pulsation Ω .